

Formelsammlung

Matthias Quintern

7. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

I	Lineare Algebra	1
1	Determinante	1
2	linalg:zeug	1
3	Eigenwerte	2
II	Geometrie	4
4	Trigonometrie	4
4.1	Verschiedene Theoreme	4
4.2	Wertetabelle	5
III	Analysis	6
4.3	Faltung / Konvolution	6
4.4	Fourieranalyse	6
4.4.1	Fourierreihe	6
4.4.2	Fouriertransformation	7
5	Liste nützlicher Integrale	7
IV	Wahrscheinlichkeitstheorie	8
6	Verteilungen	8
6.0.1	Gauß/Normal-Verteilung	9
6.0.2	Cauchy / Lorentz-Verteilung	9
6.0.3	Binomialverteilung	9
6.0.4	Poissonverteilung	10
6.0.5	Maxwell-Boltzmann Verteilung	11
6.1	Zentraler Grenzwertsatz	11
V	Mechanik	12
7	Lagrange Formalismus	12
VI	Statistische Mechanik	13

8 Entropie	13
VII Thermodynamik	14
9 Prozesse	14
9.1 Irreversible Gasexpansion (Gay-Lussac-Versuch)	14
10 Phasenübergänge	14
10.0.1 Osmose	15
10.1 Materialeigenschaften	15
11 Hauptsätze der Thermodynamik	16
11.1 Nullter Hauptsatz	16
11.2 Erster Hauptsatz	16
11.3 Zweiter Hauptsatz	17
11.4 Dritter Hauptsatz	17
12 Ensembles	17
12.1 Potentiale	18
13 Ideales Gas	18
13.0.1 Molekülgas	19
14 Reales Gas	20
14.1 Virialentwicklung	20
14.2 Van der Waals Gleichung	20
15 Ideales Quantengas	21
15.1 Bosonen	23
15.2 Fermionen	23
15.2.1 Starke Entartung	24
VIII Elektrodynamik	25
16 Maxwell-Gleichungen	25
17 Felder	25
17.1 Elektrisches Feld	25
17.2 Elektrisches Feld	25
17.3 Induktion	26
18 Hall-Effekt	26
18.1 Klassischer Hall-Effekt	26
18.2 Ganzzahliger Quantenhalleffekt	27
19 Dipol-zeug	28
IX Quantenmechanik	29
20 Basics	29
20.1 Operatoren	29
20.2 Wahrscheinlichkeitstheorie	29
20.2.1 Pauli-Matrizen	30

20.3 Kommutator	30
21 Schrödingergleichung	31
21.1 Zeitentwicklung	31
21.1.1 Schrödinger- und Heisenberg-Bild	32
21.1.2 Ehrenfest-Theorem	32
21.2 Korrespondenzprinzip	32
22 Störungstheorie	33
23 Harmonischer Oszillator	33
23.1 Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren / Leiteroperatoren	34
23.1.1 Harmonic Oscillator	34
24 Drehmoment	35
24.1 Aharanov-Bohm Effekt	35
25 Symmetrien	35
25.1 Zeitumkehrungssymmetrie	35
26 Zwei-Niveau System (TLS)	36
27 Sonstiges	36
28 Wasserstoffatom	36
28.1 Korrekturen	37
28.1.1 Darwin-Term	37
28.1.2 Spin-Bahn-Kopplung (LS-Kopplung)	37
28.1.3 Feinstruktur	38
28.1.4 Lamb-Shift	38
28.1.5 Hyperfeinstruktur	38
28.2 Effekte im Magnetfeld	39
X Festkörperphysik	40
29 Bravais-Gitter	40
30 Reziprokes Gitter	42
30.1 Streuprozesse	42
31 Freies Elektronengase	42
31.1 Drude-Modell	43
31.2 Sommerfeld-Modell	43
31.3 2D Elektronengas	43
31.4 1D Elektronengas / Quantendraht	44
31.5 0D Elektronengase / Quantenpunkt	44
32 Messtechniken	44
32.1 ARPES	44
32.2 Rastersondenmikroskopie (SPM)	44
33 Herstellungsmethoden	45
33.1 Epitaxie	45

Lineare Algebra

1 Determinante

2x2 Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb \quad (1)$$

3x3 Matrix (Regel von Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \quad (2)$$

Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right) \quad (3)$$

Produkt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (4)$$

Inverse

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \quad (5)$$

Transponiert

$$\det(A^T) = \det(A) \quad (6)$$

2 linalg:zeug

Inverse 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (7)$$

Unitäre Matrix

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (8)$$

Singulärwertzerlegung
 Faktorisierung einer reellen
 oder komplexen Matrix durch
 Rotation → Skalierung
 → Rotation.

$$A = U\Lambda V \quad (9)$$

A : $m \times n$ matrix, U : $m \times m$ unitary matrix, Λ : $m \times n$ rectangular diagonal matrix with non-negative numbers on the diagonal, V : $n \times n$ unitary matrix

2D Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

3D Rotationsmatrizen

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Eigenschaften von
 Rotationsmatrizen

$$R^T = R^{-1} \quad (14)$$

$$\det R = 1 \quad (15)$$

$$R \in \text{SO}(n) \quad (16)$$

n Dimension, $\text{SO}(n)$ spezielle orthogonale Gruppe

3 Eigenwerte

Eigenwert-Gleichung

$$Av = \lambda v \quad (17)$$

λ Eigenwert, v Eigenvektor

Charakteristisches Polynom
 Nullstellen sind die
 Eigenwerte von A

$$\chi_A = \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (18)$$

Kramers-Theorem

Wenn H invariant unter T ist
 und $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von
 H ist, dann ist $T|\psi\rangle$ auch ein
 Eigenzustand von H

$$THT^\dagger = H \quad \wedge \quad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad HT|\psi\rangle = ET|\psi\rangle \quad (19)$$

Eigenwertzerlegung

$$A = V\Lambda V^{-1} \quad (20)$$

A diagonalisierbar, Spalten von V sind die Eigenvektoren v_i , Λ Diagonalmatrix mit Eigenwerten λ_i auf der Diagonalen

TODO: Jordan stuff, blockdiagonal matrices, permutations, skalar product lapacescher entwicklungsatz maybe, cramers rule

geo II

Geometrie

4 Trigonometrie

Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (21)$$

Sinus

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad (22)$$

$$= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (23)$$

Kosinus

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!} \quad (24)$$

$$= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (25)$$

Sinus hyperbolicus

$$\sinh(x) = -i \sin ix \quad (26)$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (27)$$

Kosinus hyperbolicus

$$\cosh(x) = \cos ix \quad (28)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (29)$$

4.1 Verschiedene Theoreme

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (30)$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (31)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (32)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad (33)$$

Doppelwinkelfunktionen

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (34)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (35)$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (36)$$

$$\cos x + b \sin x = \sqrt{1 + b^2} \cos(x - \theta) \quad (37)$$

$$\tan \theta = b$$

4.2 Wertetabelle

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	-1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞

cal III

Analysis

4.3 Faltung / Konvolution

Die Faltung ist **kommutativ**, **assoziativ** und **distributiv**

Definition

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (38)$$

Notation

$$f(t) * g(t - t_0) = (f * g)(t - t_0) \quad (39)$$

$$f(t - t_0) * g(t - t_0) = (f * g)(t - 2t_0) \quad (40)$$

Kommutativität

$$f * g = g * f \quad (41)$$

Assoziativität]

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (42)$$

Distributivität

$$f * (g + h) = f * g + f * h \quad (43)$$

Komplexe konjugation

$$(f * g)^* = f^* * g^* \quad (44)$$

4.4 Fourieranalyse

4.4.1 Fourierreihe

Fourierreihe
Komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi ikt}{T}\right) \quad (45)$$

$$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ } T\text{-periodic}$$

Fourierkoeffizienten
Komplexe Darstellung

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp\left(-\frac{2\pi i}{T} kt\right) dt \quad \text{for } k \geq 0 \quad (46)$$

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad \text{if } f \text{ reellwertig} \quad (47)$$

Fourierreihe
Sinus und Kosinus
Darstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right) \quad (48)$$

$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ T -periodic

Fourierkoeffizienten
Sinus und Kosinus
Darstellung
Wenn f punktsymmetrisch:
 $a_{k>0} = 0$, wenn f
achsensymmetrisch: $b_k = 0$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(-\frac{2\pi}{T} kt\right) dt \quad \text{for } k \geq 0 \quad (49)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(-\frac{2\pi}{T} kt\right) dt \quad \text{for } k \geq 1 \quad (50)$$

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{for } k \geq 0 \quad (51)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{for } k \geq 1 \quad (52)$$

TODO:cleanup

4.4.2 Fouriertransformation

Fouriertransformierte

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(x) dx \quad (53)$$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

i) $f \mapsto \hat{f}$ linear in f

ii) $g(x) = f(x - h) \Rightarrow \hat{g}(k) = e^{-ikh} \hat{f}(k)$

iii) $g(x) = e^{ih \cdot x} f(x) \Rightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k - h)$

iv) $g(\lambda) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \hat{g}(k) \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$

5 Liste nützlicher Integrale

Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\eta \frac{\eta^{(s-1)}}{e^\eta + 1} \quad (54)$$

pt IV

Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittelwert

$$\langle x \rangle = \int w(x) x \, dx \quad (55)$$

Varianz

$$\sigma^2 = (\Delta \hat{x})^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (56)$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{(\Delta x)^2} \quad (57)$$

Median

Teilt die untere von der oberen Hälfte

$$\text{med}(x) = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & n \text{ ungerade} \\ \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2)+1}}{2} & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (58)$$

x Reihe mit n Elementen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Zufallsvariable hat Dichte f .
Das Integral gibt

Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert $x \in [a, b]$ annimmt

$$P([a, b]) := \int_a^b f(x) \, dx \quad (59)$$

f normalisiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$

Kumulative

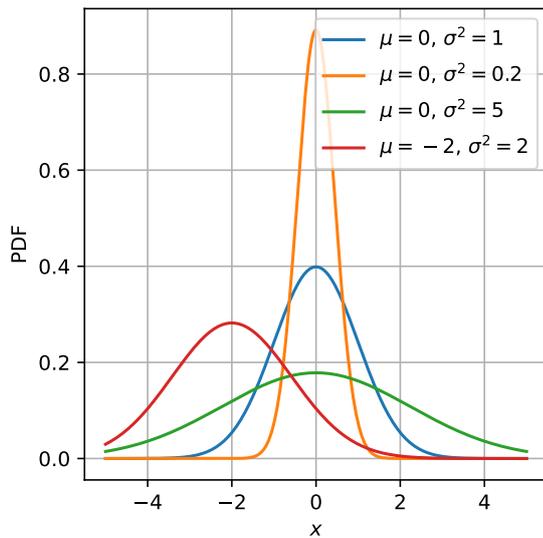
Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt \quad (60)$$

f Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

6 Verteilungen

6.0.1 Gauß/Normal-Verteilung

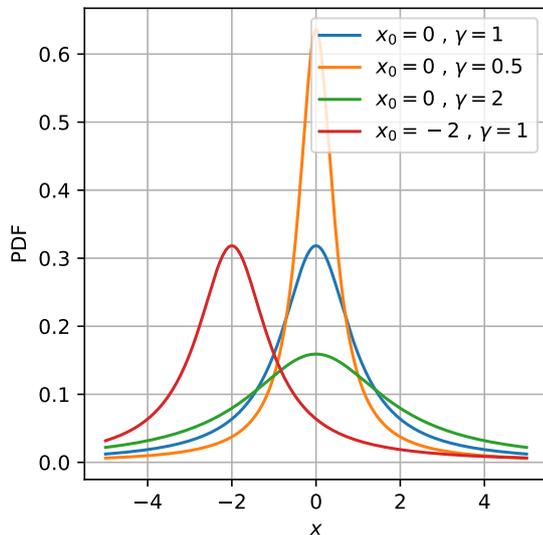


parameters	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}$
support	$x \in \mathbb{R}$
pdf	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
cdf	$\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$
mean	μ
median	μ
variance	σ^2

Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung
 $\mu = 0, \sigma = 1$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (61)$$

6.0.2 Cauchy / Lorentz-Verteilung

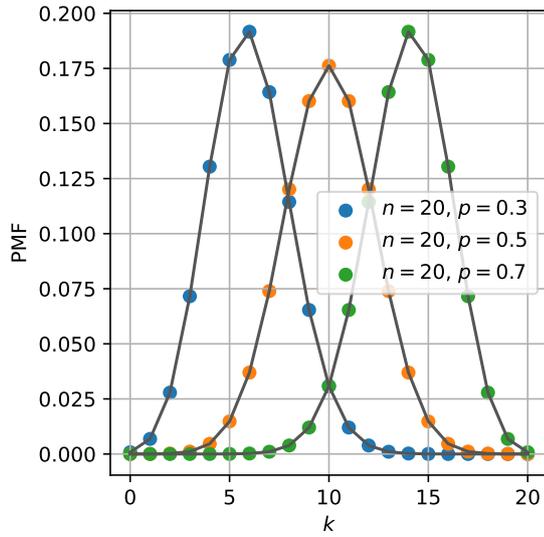


parameters	$x_0 \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$
support	$x \in \mathbb{R}$
pdf	$\frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2 \right]}$
cdf	$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$
mean	undefined
median	x_0
variance	undefined

Auch bekannt als **Cauchy-Lorentz Verteilung**, **Lorentz Funktion**, **Breit-Wigner Verteilung**.

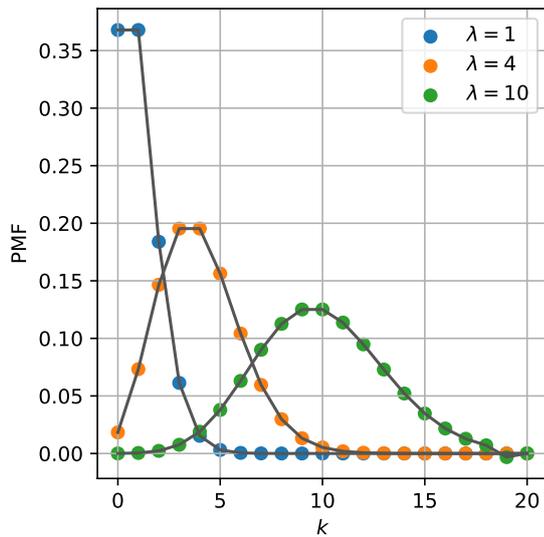
6.0.3 Binomialverteilung

Geht die Zahl der Versuche gegen unendlich ($n \rightarrow \infty$), konvergiert die Binomialverteilung gegen die Poissonverteilung



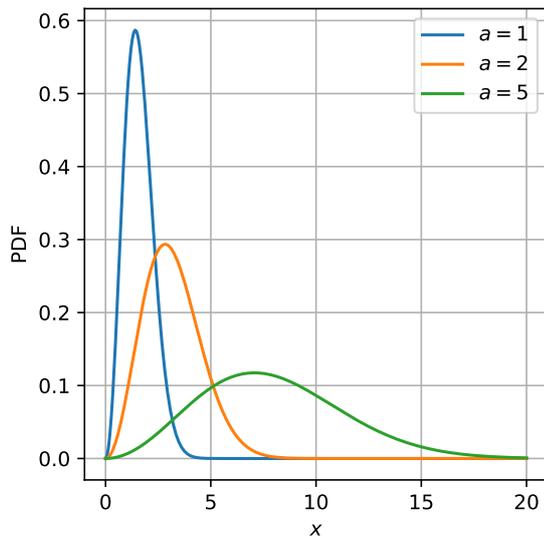
parameters	$n \in \mathbb{Z}, \quad p \in [0, 1], \quad q = 1 - p$
support	$k \in \{0, 1, \dots, n\}$
pmf	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
mean	np
median	$\lfloor np \rfloor$ or $\lceil np \rceil$
variance	$npq = np(1 - p)$

6.0.4 Poissonverteilung



parameters	$\lambda \in (0, \infty)$
support	$k \in \mathbb{N}$
pmf	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
cdf	$e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$
mean	λ
median	$\approx \left\lfloor \lambda + \frac{1}{3} - \frac{1}{50\lambda} \right\rfloor$
variance	λ

6.0.5 Maxwell-Boltzmann Verteilung



parameters	$a > 0$
support	$x \in (0, \infty)$
pdf	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$
cdf	$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$
mean	$2a \frac{2}{\pi}$
median	
variance	$\frac{a^2(3\pi - 8)}{\pi}$

6.1 Zentraler Grenzwertsatz

Sei X_1, X_2, \dots eine Reihe unabhängiger und gleichverteilter Zufallsvariablen mit $\langle X_i \rangle = \mu$ und $(\Delta X_i)^2 = \sigma^2 < \infty$. Für N gegen unendlich konvergieren die Zufallsvariablen $\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu)$ zu einer Normalverteilung $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Das bedeutet, dass die Schwankung mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ wächst und Aussagen für große N scharf werden.

Mechanik

7 Lagrange Formalismus

Der Lagrange-Formalismus ist oft der einfachste Weg die Bewegungsgleichungen zu erhalten, da das Aufstellen der Lagrange-Funktion mit geeigneten generalisierten Koordinaten oft relativ einfach ist. Die generalisierten Koordinaten werden so gewählt, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind. Zum Beispiel findet man für ein 2D Pendel die generalisierte Koordinate $q = \varphi$, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$.

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V \quad (62)$$

T kinetische Energie, V potentielle Energie

Lagrange-Gleichungen
(zweiter Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (63)$$

q generalisierte Koordinaten

Kanonischer Impuls

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (64)$$

Hamiltonian
Den Hamiltonian bekommt
man aus dem Lagrangian
über eine Legendre
Transformation

$$H(q, p) = p \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p)) \quad (65)$$

TODO:Legendre trafo

stat VI

Statistische Mechanik

Intensive Größen: Additiv für Subsysteme (Systemgrößenabhängig): $S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$

Extensive Größen: Unabhängig der Systemgröße, Verhältnis zweier intensiver Größen

Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{H, \rho\} \quad (66)$$

$\{ \}$ Poisson-Klammer

8 Entropie

Positiv Definit und Additiv

$$S \geq 0 \quad (67)$$

$$S(E_1, E_2) = S_1 + S_2 \quad (68)$$

Von-Neumann

$$S = -k_B \langle \log \rho \rangle = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \quad (69)$$

ρ Dichtematrix

Gibbs

$$S = -k_B \sum_n p_n \log p_n \quad (70)$$

p_n Wahrscheinlichkeit für Mikrozustand n

Boltzmann

$$S = k_B \log \Omega \quad (71)$$

Ω #Mikrozustände

Temperatur

$$\frac{1}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V \quad (72)$$

Druck

$$p = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E \quad (73)$$

Thermodynamik

Thermische Wellenlänge

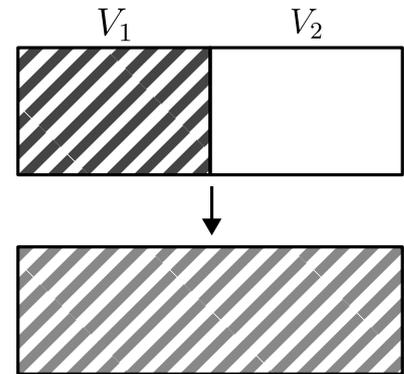
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (74)$$

9 Prozesse

- **isobar**: konstanter Druck $p = \text{const}$
- **isochor**: konstantes Volumen $V = \text{const}$
- **isotherm**: konstante Temperatur $T = \text{const}$
- **isentrop**: konstante Entropie $S = \text{const}$
- **isenthalp**: konstante Enthalpie $H = \text{const}$
- **adiabatisch**: kein Wärmeübertrag $\Delta Q = 0$
- **quasistatisch**: läuft so langsam ab, dass das System durchgehend im t.d Equilibrium bleibt
- **reversibel**: reversible Prozesse sind immer quasistatisch und es wird keine Entropie erzeugt $\Delta S = 0$

9.1 Irreversible Gasexpansion (Gay-Lussac-Versuch)

Ein klassisches Gas in einem System mit Volumen V_1 ist getrennt von einem zweiten System mit Volumen V_2 . Beim Gay-Lussac Versuch wird die Trennwand entfernt und das Gas fließt in das Volumen V_2 .



Entropieänderung

$$\Delta S = N k_B \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) > 0 \quad (75)$$

TODO:Reversible

TODO:Quasistatischer T-Ausgleich

TODO:Joule-Thompson Prozess

10 Phasenübergänge

Ein Phasenübergang ist eine Unstetigkeit in der Freien Energie F oder in der Gibbs-Energie G oder in ihrer Ableitungen. Die Ordnung des Phasenübergangs ist die Ordnung der Ableitung, in welcher

die Unstetigkeit auftritt.

Latente Wärme
Für den Phasenübergang von
Phase 1 nach Phase 2
benötigte Wärme

$$Q_L = T \Delta S \quad (76)$$

ΔS Entropieänderung des Phasenübergangs

Clausius-Clapeyron Gleichung
Steigung der Phasengrenzlinie

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_L}{T \Delta V} \quad (77)$$

ΔV Volumenänderung des Phasenübergangs

Phasenübergang
Im Koexistenzbereich

und damit

$$G_1 = G_2 \quad (78)$$

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (79)$$

Gibbsche Phasenregel

$$f = c - p + 2 \quad (80)$$

c #Komponenten, f #Freiheitsgrade, p #Phasen

10.0.1 Osmose

Osmosis ist die spontane Passage oder Diffusion Lösungsmittelmolekülen durch eine semi-permeable Membran die für das Lösungsmittel, jedoch nicht die darin gelösten Stoffe durchlässig ist. Die Richtung der Diffusion ist vom Gebiet mit hohem chemischen Potential (niedrigere Konzentration des gelösten Stoffes) in das mit niedrigem chemischem Potential (höhere Konzentration des gelösten Stoffes), so dass die Konzentration des gelösten Stoffes ausgeglichen wird.

Osmotischer Druck /
Van-t-hoff'sches Gesetz

$$p_{\text{osm}} = k_B T \frac{N_c}{V} \quad (81)$$

N_c #gelöster Teilchen

10.1 Materialeigenschaften

Wärmekapazität

$$c = \frac{Q}{\Delta T} \quad (82)$$

Q Wärme

Isochore Wärmekapazität

$$c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (83)$$

U innere Energie

Isobare Wärmekapazität	$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad (84)$ <p><i>H</i> Enthalpie</p>
Kompressionsmodul	$K = -V \frac{dp}{dV} \quad (85)$ <p><i>p</i> Druck, <i>V</i> Anfangsvolumen</p>
Kompressibilität	$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (86)$
Isotherme Kompressibilität	$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{K} \quad (87)$
Adiabatische Kompressibilität	$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \quad (88)$
Thermaler Ausdehnungskoeffizient	$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,N} \quad (89)$

11 Hauptsätze der Thermodynamik

11.1 Nullter Hauptsatz

Wenn sich zwei Systeme jeweils im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten befinden, befinden sie sich auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

$$A \overset{th.GGW.}{\leftrightarrow} C \wedge B \overset{th.GGW.}{\leftrightarrow} C \Rightarrow A \overset{th.GGW.}{\leftrightarrow} B \quad (90)$$

11.2 Erster Hauptsatz

In einem abgeschlossenen System ist die Änderung der inneren Energie U gleich der gewonnenen Wärme Q minus der vom System an der Umgebung verrichteten Arbeit W .

Änderung der inneren Energie

$$\Delta U = \delta Q - \delta W \quad (91)$$

$$dU = T dS - p dV \quad (92)$$

11.3 Zweiter Hauptsatz

Clausius: Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niedriger Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur ist.

Kelvin: Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die weiter nichts bewirkt als Hebung einer Last und Abkühlung eines Wärmereservoirs.

11.4 Dritter Hauptsatz

Es ist unmöglich, ein System bis zum absoluten Nullpunkt abzukühlen.

Entropiedichte

$$\lim_{T \rightarrow 0} s(T) = 0 \quad (93)$$

und damit auch

$$(94)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} c_V = 0 \quad (95)$$

$$s = \frac{S}{N}$$

12 Ensembles

Tabelle 1: caption

	td:ensembles:mk	td:ensembles:k	td:ensembles:gk
variables	E, V, N	T, V, N	T, V, μ
partition_sum	$\Omega = \sum_n 1$	$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$	$Z_g = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}$
probability	$p_n = \frac{1}{\Omega}$	$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$	$p_n = \frac{e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}}{Z_g}$
td_pot	$S = k_B \ln \Omega$	$F = -k_B T \ln Z$	$\Phi = -k_B T \ln Z$
pressure	$p = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E, N}$	$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}$	$p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu} = - \frac{\Phi}{V}$
entropy	$S = k_B \ln \Omega$	$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N}$	$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V, \mu}$

Ergodenhypothese
 Innerhalb einer langen
 Zeitspanne sind alle
 energetisch erreichbaren
 Mikrozustände im
 Phasenraum gleich
 wahrscheinlich

$$\langle A \rangle_{\text{Zeit}} = \langle A \rangle_{\text{Ensemble}} \quad (96)$$

A Messgröße

12.1 Potentiale

Innere Energie

$$dU(S, V, N) = T dS - p dV + \mu dN \quad (97)$$

Enthalpie

$$dH(S, p, N) = T dS + V dp + \mu dN \quad (98)$$

Gibbsche Energie

$$dG(T, p, N) = -S dT + V dp + \mu dN \quad (99)$$

Freie Energie / Helmholtz Energie

$$dF(T, V, N) = -S dT - p dV + \mu dN \quad (100)$$

Großkanonisches Potential

$$d\Phi(T, V, \mu) = -S dT - p dV - N d\mu \quad (101)$$

TODO:Maxwell Relationen, TD Quadrat

13 Ideales Gas

Das ideale Gas besteht aus nicht-wechselwirkenden, ununterscheidbaren Teilchen.

Phase space volume
 $3N$ Kugel

$$\Omega(E) = \int_V d^3q_1 \dots \int_V d^3q_N \int d^3p_1 \dots \int d^3p_N \frac{1}{N! h^{3N}} \Theta\left(E - \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m}\right) \quad (102)$$

$$= \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{-\frac{5N}{2}} \quad (103)$$

N #Teilchen, h^{3N} Volumen eines Mikrozustandes, $N!$ Teilchen sind ununterscheidbar

Entropie

$$S = \frac{5}{2} N k_B + N k_B \ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m E}{3h^2 N} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (104)$$

Ideale Gasgleichung

$$pV = nRT \quad (105)$$

$$= Nk_B T \quad (106)$$

Kalorische Zustandsgleichung

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T \quad (107)$$

Äquipartitionstheorem
Jedem Freiheitsgrad steht die
Energie U_D zur Verfügung

$$U_D = \frac{1}{2} k_B T \quad (108)$$

Maxwellsche
Geschwindigkeitsverteilung
Siehe auch 6.0.5

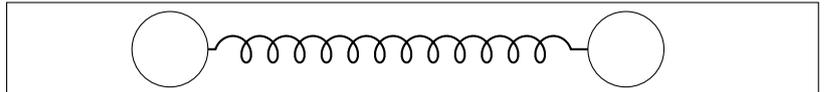
$$w(v) dv = 4\pi \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv \quad (109)$$

Mittlere quadratische
Geschwindigkeit
pro Teilchen im 3D-Gas

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty dv v^2 w(v) = \frac{3k_B T}{m} \quad (110)$$

13.0.1 Molekülgas

Molekülgas
2 Teilchen der Masse M sind
verbunden durch eine "Feder"
mit Länge L



Translation

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i \quad (111)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{\vec{p}_r^2}{2M} \quad (112)$$

$$n_i \in \mathbb{N}_0, i = x, y, z$$

Schwingungen

$$E_{\text{vib}} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (113)$$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

Rotation

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) \quad (114)$$

$$j \in \mathbb{N}_0$$

14 Reales Gas

14.1 Virialentwicklung

Entwicklung desw Drucks p in eine Potenzreihe der Dichte ρ .

Virialentwicklung
Der zweite und dritte
Virialkoeffizient ist für viele
Substanzen tabelliert

$$p = k_B T \rho [1 + B(T)\rho + C(T)\rho^2 + \dots] \quad (115)$$

B und C 2. und 3. Virialkoeffizient, $\rho = \frac{N}{V}$

Mayer-Funktion

$$f(\vec{r}) = e^{-\beta V(i,j)} - 1 \quad (116)$$

$V(i, j)$ Paarpotential

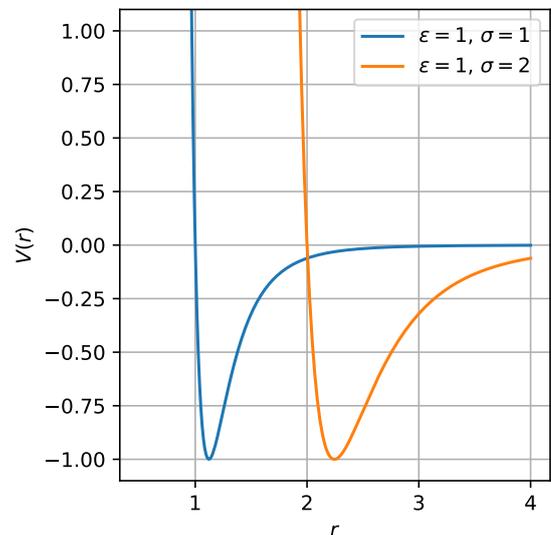
Zweiter Virialkoeffizient
Hängt vom Paarpotential
zweier Moleküle ab

$$B = -\frac{1}{2} \int_V d^3\vec{r} f(\vec{r}) \quad (117)$$

Lennard-Jones-Potential

Potential zwischen zwei Molekülen. Attraktiv für $r > \sigma$,
repulsiv für $r < \sigma$

$$V(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (118)$$



14.2 Van der Waals Gleichung

Annahme eines Harte-Kugeln Potentials mit einer schwachen Anziehung

Zustandssumme

$$Z_N = \frac{(V - V_0)^N}{\lambda^{3N} N!} e^{\frac{\beta N^2 a}{V}} \quad (119)$$

a Kohäsionsdruck

Van der Waals-Gleichung

$$p = \frac{Nk_{\text{B}}T}{V-b} - \frac{N^2a}{V^2} \quad (120)$$

b Kovolumen

TODO:sometimes N is included in a, b

15 Ideales Quantengas

Fugazität

$$z = e^{\mu\beta} = e^{\frac{\mu}{k_{\text{B}}T}} \quad (121)$$

Besetzungszahl

$$\sum_r n_r = N \quad (122)$$

r Zustände

Ununterscheidbare Teilchen

$$|p_1, p_2, \dots, p_N\rangle = |p_1\rangle |p_2\rangle \dots |p_N\rangle \quad (123)$$

p_i Zustand

Anwenden des Paritätsoperators gibt eine *symmetrische* (Bosonen) und eine *antisymmetrische* (Fermionen) Lösung

$$\hat{P}_{12}\psi(p_i(\vec{r}_1), p_j(\vec{r}_2)) = \pm\psi(p_i(\vec{r}_1), p_j(\vec{r}_2)) \quad (124)$$

\hat{O}_{12} Paritätsoperator tauscht 1 und 2, \pm : $\begin{matrix} \text{bos} \\ \text{fer} \end{matrix}$

Spinentartungsfaktor

$$g_s = 2s + 1 \quad (125)$$

s Spin

Zustandsdichte

$$g(\epsilon) = g_s \frac{V}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon} \quad (126)$$

g_s [td:id_qgas:spin_degeneracy_factor](#)

Besetzungszahl pro Energie

$$n(\epsilon) d\epsilon = \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \mp 1} d\epsilon \quad (127)$$

[td:id_qgas:dos](#) , \pm : $\begin{matrix} \text{bos} \\ \text{fer} \end{matrix}$

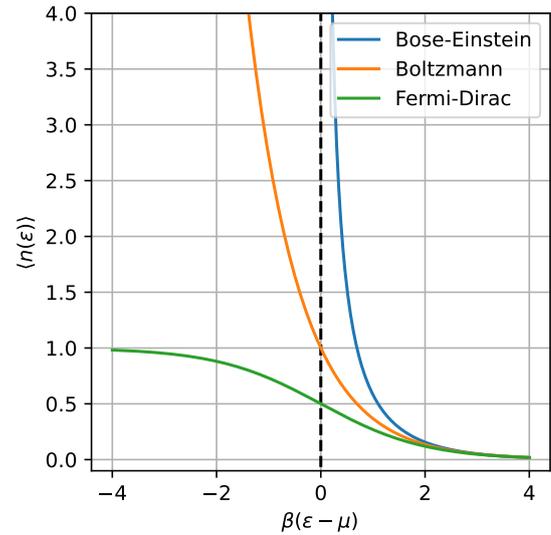
Besetzungszahl

$$\langle n(\epsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \mp 1} \quad (128)$$

for $\epsilon - \mu \gg k_B T$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}} \quad (129)$$

\pm : bos
fer



Teilchenzahl

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty n(\epsilon) d\epsilon \quad (130)$$

Energie
Gleich wie beim klassischen
idealen Gas

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon = \frac{3}{2} pV \quad (131)$$

Zustandsgleichung
Bosonen: verringerter Druck
da sie clustern
Fermionen: erhöhter Druck
durch das Pauli-Prinzip

$$pV = k_B T \ln Z_g \quad (132)$$

after Virialentwicklung

$$= N k_B T \left[1 \mp \frac{\lambda^3}{2^{5/2} g v} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 \right) \right] \quad (133)$$

\pm : bos
fer, $v = \frac{V}{N}$ spezifisches Volumen

Relevanz der qm. Korrekturen

Korrekturen werden relevant,
wenn der Teilchenabstand in
der Größenordnung der
thermischen Wellenlänge ist

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{\lambda}{g_s^{\frac{1}{3}}} \quad (134)$$

Verallgemeinerte
Zeta-Funktion

$$\left. \begin{matrix} g_\nu(z) \\ f_\nu(z) \end{matrix} \right\} := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} \mp 1} \quad (135)$$

15.1 Bosonen

Zustandssumme

$$Z_g = \prod_p \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} \quad (136)$$

$$p \in \mathbb{N}_0$$

Besetzungszahl
Bose-Einstein Verteilung

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (137)$$

15.2 Fermionen

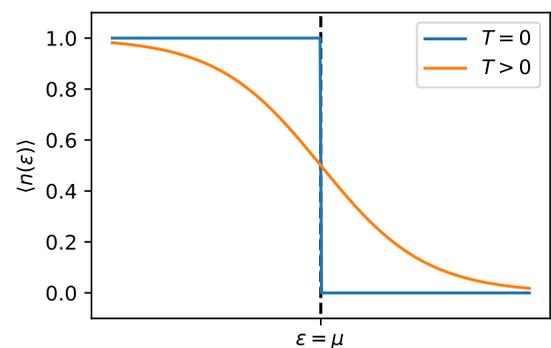
Zustandssumme

$$Z_g = \prod_p (1 + e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}) \quad (138)$$

$$p = 0, 1$$

Besetzungszahl
Fermi-Dirac Verteilung

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (139)$$



Slater-Determinante

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} p_1(\vec{r}_1) & p_2(\vec{r}_1) & \dots & p_N(\vec{r}_1) \\ p_1(\vec{r}_2) & p_2(\vec{r}_2) & \dots & p_N(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\vec{r}_N) & p_2(\vec{r}_N) & \dots & p_N(\vec{r}_N) \end{vmatrix} \quad (140)$$

Fermienergie

$$\epsilon_F := \mu(T = 0) \quad (141)$$

Fermi Temperatur

$$T_F := \frac{\epsilon_F}{k_B} \quad (142)$$

Fermi-Impuls
 Radius der *Fermi-Kugel* im
 Impulsraum. Zustände mit P_F
 sind auf der *Fermi-Fläche*

$$p_F = \hbar k_F = (2mE_F)^{\frac{1}{2}} \quad (143)$$

Spezifische Dichte

$$v = \frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (144)$$

f [td:id_qgas:generalized_zeta](#) , g Entartungsfaktor, z
[td:id_qgas:fugacity](#)

15.2.1 Starke Entartung

Sommerfeld-Entwicklung
 für geringe Temperaturen
 $T \ll T_F$

$$f_\nu(z) = \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(1 + \frac{\pi^6}{6} \frac{\nu(\nu-1)}{(\ln z)^2} + \dots \right) \quad (145)$$

Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{2} \frac{g}{\lambda^3} k_B T f_{5/2}(z) \quad (146)$$

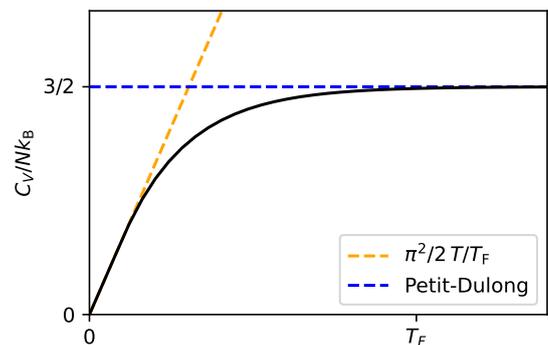
[td:id_qgas:fer:degenerate:sommerfeld](#)

$$\approx \frac{3}{5} \frac{N}{V} E_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right) \quad (147)$$

Wärmecapacity
 für geringe Temperaturen $T \ll T_F$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = N k_B \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right) \quad (148)$$

weicht ab vom [td:TODO:petit_dulong](#)



[TODO:Entartung und Sommerfeld](#) [TODO:DULONG-PETIT](#) Gesetz

ed VIII

Elektrodynamik

16 Maxwell-Gleichungen

Vakuum
Mikroskopische Formulierung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{el}}}{\epsilon_0} \quad (149)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (150)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (151)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (152)$$

Materie
Makroskopische Formulierung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{el}} \quad (153)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (154)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (155)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (156)$$

17 Felder

17.1 Elektrisches Feld

Gaußsches Gesetz für elektrische Felder
Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist proportional zur elektrischen Ladung

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (157)$$

S geschlossene Fläche

17.2 Elektrisches Feld

Magnetischer Fluss

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (158)$$

Gaußsches Gesetz für Magnetismus
Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist 0
⇒ es gibt keine magnetischen Monopole

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (159)$$

S geschlossene Fläche

	(160)
Magnetisierung	$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad (161)$ <p><i>m</i> mag. Moment, <i>V</i> Volumen</p>
Drehmoment	$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (162)$ <p><i>m</i> mag. Moment</p>
Suszeptibilität	$\chi_m = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \quad (163)$
Poynting-Vektor Gerichteter Energiefluss oder Leistungsfluss eines elektromagnetischen Feldes [W/m ²]	$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (164)$

17.3 Induktion

Faradaysche Induktionsgesetz	$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (165)$
------------------------------	--

18 Hall-Effekt

Zyklotronfrequenz	$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (166)$
-------------------	---

TODO:Move

18.1 Klassischer Hall-Effekt

Fließt in einem Leiter ($l \times b \times d$) ein Strom in x Richtung, während der Leiter von einem Magnetfeld B in z -Richtung durchdrungen, wird eine Hallspannung U_H in y -Richtung induziert.

Hallspannung

$$U_H = \frac{IB}{ned} \quad (167)$$

n Ladungsträgerdichte

Hall-Koeffizient

$$R_H = -\frac{Eg}{j_x Bg} = \frac{1}{ne} = \frac{\rho_{xy}}{B_z} \quad (168)$$

Spezifischer Widerstand

$$\rho_{xx} = \frac{m_e}{ne^2\tau} \quad (169)$$

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne} \quad (170)$$

18.2 Ganzzahliger Quantenhalleffekt

Leitfähigkeitstensor

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (171)$$

Spezifischer
Widerstands-tensor

$$\rho = \sigma^{-1} \quad (172)$$

Spezifischer Hallwiderstand

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad (173)$$

$\nu \in \mathbb{Z}$

TODO:sort

Impedanz eines Kondensators

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (174)$$

Impedanz eines Induktors

$$Z_L = i\omega L \quad (175)$$

TODO:impedance addition for parallel / linear

19 Dipol-zeug

Dipolstrahlung
Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{r} \quad (176)$$

Zeitlich mittlere Leistung

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} \quad (177)$$

Quantenmechanik

20 Basics

20.1 Operatoren

Dirac-Notation

$$\langle x| \text{ "Bra" Zeilenvektor} \quad (178)$$

$$|x\rangle \text{ "Ket" Spaltenvektor} \quad (179)$$

$$\hat{A}|\beta\rangle = |\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha| = \langle\beta|\hat{A}^\dagger \quad (180)$$

Dagger

$$\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^T \quad (181)$$

$$(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger \quad (182)$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \quad (183)$$

$$(184)$$

Adjungierter operator

$$\langle\alpha|\hat{A}^\dagger|\beta\rangle = \langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle^* \quad (185)$$

Hermitescher operator

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (186)$$

20.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad (187)$$

ρ Dichte einer Erhaltungsgröße q , j Fluß von q

Zustandswahrscheinlichkeit

$$TODO \quad (188)$$

Dispersion

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle \quad (189)$$

Allgemeine Unschärferelation

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 \quad (190)$$

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (191)$$

20.2.1 Pauli-Matrizen

Pauli Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| \quad (192)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i |0\rangle \langle 1| + i |1\rangle \langle 0| \quad (193)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1| \quad (194)$$

20.3 Kommutator

Kommutator

$$[A, B] = AB - BA \quad (195)$$

Antikommutator

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (196)$$

Kommutatorrelationen

$$[A, BC] = [A, B]C - B[A, C] \quad (197)$$

TODO:add some more?

Kommutator mit einer Funktion

$$[f(A), B] = [A, B] \frac{\partial f}{\partial A} \quad (198)$$

$$\text{falls } [A, [A, B]] = 0$$

Jakobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (199)$$

Lemma von Hadamard

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (200)$$

Kanonische
Vertauschungsrelationen

$$[x_i, x_j] = 0 \quad (201)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (202)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (203)$$

x, p kanonische konjugierte

21 Schrödingergleichung

Energieoperator

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (204)$$

Impulsoperator

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}_x \quad (205)$$

Ortsoperator

$$\vec{x} = i\hbar \vec{\nabla}_p \quad (206)$$

Stationäre
Schrödingergleichung

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (207)$$

Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + \vec{V}(x) \right) \psi(x) \quad (208)$$

21.1 Zeitentwicklung

The time evolution of the Hamiltonian is given by:

Zeitentwicklungsoperator

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (209)$$

U unitär

Von-Neumann Gleichung
 Zeitentwicklung des
 Dichteoperators im
 Schrödingerbild. Qm.
 Analogon zur
 Liouville-Gleichung ??

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (210)$$

Lindblad-Mastergleichung
 Verallgemeinerung der
 von-Neumann Gleichung für
 offene Quantensysteme

$$\dot{\rho} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho]}_{\text{reversible}} + \underbrace{\sum_{n,m} h_{nm} \left(\hat{A}_n \rho \hat{A}_m^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_n, \rho \} \right)}_{\text{irreversible}} \quad (211)$$

h positiv-semifinite Matrix, \hat{A} beliebiger Operator

TODO:unitary transformation of time dependent H

21.1.1 Schrödinger- und Heisenberg-Bild

Im Schrödinger-Bild sind die Zustände zeitabhängig, im Heisenberg-Bild sind die Observablen (Operatoren) zeitabhängig

Schrödinger Zeitentwicklug

$$|\psi(t)_S\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (212)$$

Heisenberg Zeitentwicklung

$$|\psi_H\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (213)$$

$$A_H = U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0) \quad (214)$$

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H, \hat{H}_H] + \left(\frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \right)_H \quad (215)$$

mit H und S dem Heisenberg- und Schrödinger-Bild

21.1.2 Ehrenfest-Theorem

Siehe auch ??

Ehrenfest-Theorem
 gilt für beide Bilder

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (216)$$

Beispiel für x

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -\langle \nabla V(x) \rangle = \langle F(x) \rangle \quad (217)$$

21.2 Korrespondenzprinzip

Die klassischen Bewegungsgleichungen lassen sich als Grenzfall (große Quantenzahlen) aus der Quantenmechanik ableiten.

22 Störungstheorie

qm:qm_perturbation:desc

Hamiltonian	$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1 \quad (218)$
Potenzreihe	$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (219)$ $ \psi_n\rangle = \psi_n^{(0)}\rangle + \lambda \psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 \psi_n^{(2)}\rangle + \dots \quad (220)$
Energieverschiebung 1. Ordnung	$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} \hat{H}_1 \psi_n^{(0)} \rangle \quad (221)$
Zustände	$ \psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_k^{(0)} \hat{H}_1 \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)}\rangle \quad (222)$
Energieverschiebung 2. Ordnung	$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{ \langle \psi_k^{(0)} \hat{H}_1 \psi_n^{(0)} \rangle ^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad (223)$
Fermis goldene Regel Übergangsrate des initial Zustandes $ i\rangle$ unter einer Störung H^1 zum Endzustand $ f\rangle$	$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle f H^1 i \rangle ^2 \rho(E_f) \quad (224)$

23 Harmonischer Oszillator

Hamiltonian	$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (225)$ $= \frac{1}{2} \hbar \omega + \omega a^\dagger a \quad (226)$
-------------	---

Energiespektrum

$$E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (227)$$

Siehe auch ??

23.1 Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren / Leiteroperatoren

Teilchenzahloperator/Besetzungszahloperator

$$\hat{N} := a^\dagger a \quad (228)$$

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (229)$$

$|n\rangle$ = Fock-Zustände, \hat{a} = Vernichtungsoperator, \hat{a}^\dagger = Erzeugungsoperator

Kommutator

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (230)$$

$$[N, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (231)$$

$$[N, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (232)$$

Anwendung auf Zustände

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (233)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (234)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (235)$$

23.1.1 Harmonic Oscillator

Harmonischer Oszillator

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (236)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (237)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (238)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{X} + i\tilde{P}) \quad (239)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{X} - i\tilde{P}) \quad (240)$$

24 Drehmoment

Blochwellen
Lösen stat. SG im
periodischen Potential mit
Periode \vec{R} : $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{R})$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (241)$$

\vec{k} beliebig, u periodische Funktion

24.1 Aharonov-Bohm Effekt

Erhaltene Phase
Elektron entlang eines
geschlossenen Phase erhält
eine Phase die proportional
zum eingeschlossenen
magnetischem Fluss ist

$$\delta = \frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{2e}{\hbar} \Phi \quad (242)$$

TODO:replace with loop intergral symbol and add more info

25 Symmetrien

Die meisten Symmetrieoperatoren sind unitär ??, da die Norm eines Zustands invariant unter Raum-, Zeit- und Spin-Transformationen sein muss.

Invarianz
 \hat{H} is invariant unter der von
 \hat{U} beschriebenen Symmetrie
wenn gilt:

$$\hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger = \hat{H} \Leftrightarrow [\hat{U}, \hat{H}] = 0 \quad (243)$$

25.1 Zeitumkehrungssymmetrie

Zeitumkehrungssymmetrie

$$T : t \rightarrow -t \quad (244)$$

Antiunitär

$$T^2 = -1 \quad (245)$$

26 Zwei-Niveau System (TLS)

James-Cummings
Hamiltonian
TLS interagiert mit
resonantem Lichtfeld

$$H = \underbrace{\hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\text{field}} + \underbrace{\hbar\omega_a \frac{\hat{\sigma}_z}{2}}_{\text{atom}} + \underbrace{\frac{\hbar\Omega}{2} \hat{E} \hat{S}}_{\text{int}} \quad (246)$$

after RWA:

$$= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (247)$$

$$= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (248)$$

$\hat{E} = E_{\text{ZPF}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ Feldoperator mit bosonischen Leiteroperatoren, $\hat{S} = \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}$ Polarisationsoperator mit Leiteroperatoren des TLS

27 Sonstiges

Rotating Wave
Approximation /
Drehwellennäherung (RWS)
Schnell oscillierende Terme
werden vernachlässigt

$$\Delta\omega := |\omega_0 - \omega_L| \ll |\omega_0 + \omega_L| \approx 2\omega_0 \quad (249)$$

ω_L Frequenz des Lichtes, ω_0 Übergangsfrequenz

28 Wasserstoffatom

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K} \stackrel{m_e \ll m_K}{\approx} m_e \quad (250)$$

Coulomb potential
Für ein Eielektronenatom

$$V(\vec{r}) = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (251)$$

Z Ordnungszahl/Kernladungszahl

Hamiltonian

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad (252)$$

$$= \frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r} + V(r) \quad (253)$$

Wellenfunktion

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (254)$$

Radialanteil	$R_{nl} = -\sqrt{\frac{(n-l-1)!(2\kappa)^3}{2n[(n+l)!]^3}} (2\kappa r)^l e^{-\kappa r} L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa r) \quad (255)$
	<p>with</p> $\kappa = \frac{\sqrt{2\mu E }}{\hbar} = \frac{Z}{na_B} \quad (256)$
	$L_r^s(x)$ Laguerre-Polynome
Energieeigenwerte	$E_n = \frac{Z^2 \mu e^4}{n^2 (4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} = -E_H \frac{Z^2}{n^2} \quad (257)$
Rydberg-Energy	$E_H = h c R_H = \frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \quad (258)$

28.1 Korrekturen

28.1.1 Darwin-Term

Relativistische Korrektur: Elektronen führen eine Zitterbewegung aus und sind nicht vollständig lokalisiert.

Energieverschiebung	$\Delta E_{\text{rel}} = -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right) \quad (259)$
Feinstrukturkonstante Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (260)$

28.1.2 Spin-Bahn-Kopplung (LS-Kopplung)

The Wechselwirkung zwischen dem Elektronenspin und dem elektrostatischen Feld des Kerns führt zu Energieverschiebungen.

Energieverschiebung	$\Delta E_{\text{LS}} = \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle \quad (261)$
---------------------	---

??

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle &= \frac{1}{2} \langle [J^2 - L^2 - S^2] \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\end{aligned}\quad (262)$$

28.1.3 Feinstruktur

Die Feinstruktur vereint relativistische Korrekturen 28.1.1 und die Spin-Orbit-Kupplung 28.1.2.

Energieverschiebung

$$\Delta E_{\text{FS}} = \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \quad (263)$$

28.1.4 Lamb-Shift

Die Wechselwirkung zwischen dem Elektron und vom Kern absorbierten/emittierten virtuellen Photonen führt zu einer (sehr kleinen) Energieverschiebung.

Potentielle Energy

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle \quad (264)$$

δr Schwankung von r

28.1.5 Hyperfeinstruktur

Wechselwirkung von Kernspin mit dem vom Elektron erzeugten Magnetfeld spaltet Energieniveaus

Kernspin

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad (265)$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{i(i+1)}\hbar \quad (266)$$

$$I_z = m_i \hbar \quad (267)$$

$$m_i = -i, -i+1, \dots, i-1, i \quad (268)$$

Gesamtdrehimpuls

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad (269)$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{f(f+1)}\hbar \quad (270)$$

$$F_z = m_f \hbar \quad (271)$$

Auswahlregel

$$f = j \pm i \quad (272)$$

$$m_f = -f, -f + 1, \dots, f - 1, f \quad (273)$$

Hyperfeinstrukturkonstante

$$A = \frac{g_i \mu_K B_{\text{HFS}}}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (274)$$

B_{HFS} Hyperfeinfeld, μ_K Kernmagneton, g_i Kern-g-Faktor
??

Energieverschiebung

$$\Delta H_{\text{HFS}} = \frac{A}{2} [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)] \quad (275)$$

TODO:landé factor

28.2 Effekte im Magnetfeld

TODO:all

TODO:Hunds rules

Festkörperphysik

29 Bravais-Gitter

Tabelle 2: In 2D gibt es 5 verschiedene Bravais-Gitter

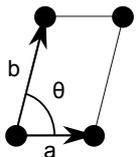
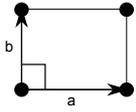
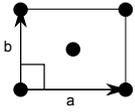
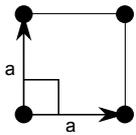
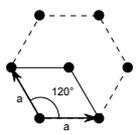
Gittersystem	Punktgruppe	5 Bravais Gitter	
		primitive (p)	centered (c)
monoclinic (m)	C_2		
orthorhombic (o)	D_2		
tetragonal (t)	D_4		
hexagonal (h)	D_6		

Tabelle 3: In 3D gibt es 14 verschiedene Bravais-Gitter

Kristall-system	Gittersystem	Punktgruppe	14 Bravais Gitter			
			primitive (P)	base_centered (S)	body_centered (I)	face_centered (F)
triclinic (a)		C_i				
monoclinic (m)		C_{2h}				
orthorhombic (o)		D_{2h}				
tetragonal (t)		D_{4h}				
hexagonal (h)	rhombohedral	D_{3d}				
	hexagonal	D_{6h}				
cubic (c)		O_h				

30 Reziprokes Gitter

Das rezioproke Gitter besteht aus dem dem Satz aller Wellenvektoren \vec{k} , die ebene Wellen mit der Periodizität des Bravais-Gitters ergeben.

Reziproke Gittervektoren

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \quad (276)$$

$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 \quad (277)$$

$$\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \quad (278)$$

a_i Bravais-Gitter Vektoren, V_c Volumen der primitiven Gitterzelle

30.1 Streuprozesse

Matthiessensche Regel
Näherung, nur gültig wenn die einzelnen Streuprozesse von einander unabhängig sind

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=\text{Streuprozesse}} \frac{1}{\mu_i} \quad (279)$$

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{i=\text{Streuprozesse}} \frac{1}{\tau_i} \quad (280)$$

μ Mobilität, τ Streuzzeit

31 Freies Elektronengase

Annahmen: Elektronen bewegen sich frei und unabhängig voneinander.

Driftgeschwindigkeit
Geschwindigkeitskomponente durch eine externe Kraft (z.B. ein elektrisches Feld)

$$\vec{v}_D = \vec{v} - \vec{v}_{th} \quad (281)$$

v_{th} thermische Geschwindigkeit

Streuzzeit

$$\tau \quad (282)$$

Mittlere freie Weglänge

$$\ell = \langle v \rangle \tau \quad (283)$$

Beweglichkeit

$$\mu = \frac{q\tau}{m} \quad (284)$$

q Ladung, m Masse

31.1 Drude-Modell

Ein klassisches Model zur Beschreibung der Transporteigenschaften von Elektronen in (v.a.) Metallen: Der Festkörper wird als Ionenkristall mit frei beweglichen Elektronen (Elektronengas). Die Elektronen werden durch ein Elektrisches Feld E beschleunigt und durch Stöße mit den Gitterionen gebremst. Das Modell vernachlässigt die Fermi-Dirac Verteilung der Leitungselektronen.

Bewegungsgleichung

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_e}{\tau} \vec{v}_D = -e\vec{E} \quad (285)$$

v Elektronengeschwindigkeit, \vec{v}_D Driftgeschwindigkeit, τ Stoßzeit

Stromdichte
Ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_D = ne\mu\vec{E} \quad (286)$$

n Ladungsträgerdichte

Drude-Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{e^2\tau n}{m_e} = ne\mu \quad (287)$$

31.2 Sommerfeld-Modell

Annahme eines freien Fermionengases, welches dem Pauli-Prinzip unterliegt. Nur Elektronen in einem Energiebereich von $k_B T$ um die Fermi Energie E_F nehmen an Streuprozessen teil.

Stromdichte

$$\vec{j} = -en \langle v \rangle = -en \frac{\hbar}{m_e} \langle \vec{k} \rangle = -e \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hbar \vec{k}}{m_e} \quad (288)$$

TODO: The formula for the conductivity is the same as in the drude model?

31.3 2D Elektronengas

Niederdimensionale Elektronengase erhält man, wenn ein 3D Gas durch unendlich hohe Potentialwände auf einem schmalen Bereich mit Breite L eingeschränkt wird.

Confinement Energie
Erhöht die
Grundzustandsenergie

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2} \quad (289)$$

Energie

$$E_n = \underbrace{\frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_e}}_{x-y: \text{ ebene Welle}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2} n^2}_z \quad (290)$$

31.4 1D Elektronengas / Quantendraht

Energie

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_e} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L_z^2} n_1^2 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L_y^2} n_2^2 \quad (291)$$

31.5 0D Elektronengase / Quantenpunkt

TODO:TODO

32 Messtechniken

32.1 ARPES

what? in? how? plot

32.2 Rastersondenmikroskopie (SPM)

Bilder der Oberfläche einer Probe werden erstellt, indem die Probe mit einer Sonde abgetastet wird.

Name	Atomare Rasterkraftmikroskopie (AMF)
Anwendung	Oberflächenzeug
how	Mit Nadel

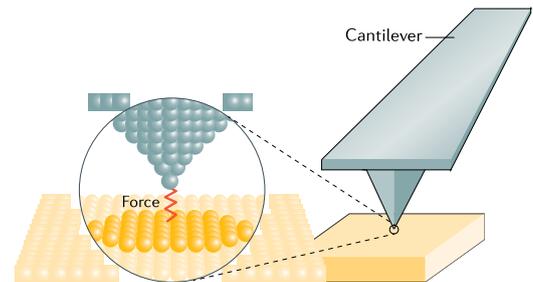


Abbildung 1: [?]

Name	Rastertunnelmikroskop (STM)
Anwendung	Oberflächenzeug
how	Mit TUnnel

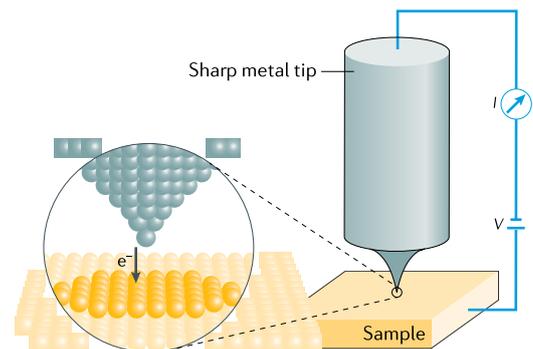
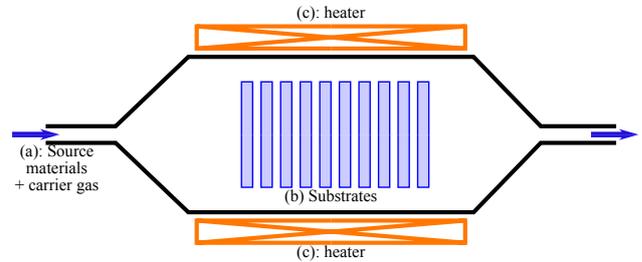


Abbildung 2: [?]

33 Herstellungsmethoden

Name	Chemische Gasphasenabscheidung (CVD)
how	An der erhitzten Oberfläche eines Substrates wird aufgrund einer chemischen Reaktion mit einem Gas eine Feststoffkomponente abgeschieden. Nebenprodukte werden durch den Gasfluss durch die Kammer entfernt.
Anwendung	<ul style="list-style-type: none"> • Poly-silicon Si • Siliziumdioxid SiO₂ • Graphen • Diamant



33.1 Epitaxie

Eine Art des Kristallwachstums, bei der mindestens eine kristallographische Ordnung der wachsenden Schicht der des Substrates entspricht.

Name	Molekularstrahlepitaxie (MBE)
how	Die Elemente werden in einem Ultrahochvakuum erhitzt, bis sie langsam sublimieren. Die entstandenen Gase kondensieren dann auf der Oberfläche des Substrats
Anwendung	<ul style="list-style-type: none"> • Galliumarsenid GaAs

